Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis
Folia 36 Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia I (2006)

Adam Płocki

Ziarnista przestrzeń probabilistyczna w stochastyce dla nauczyciela – dydaktyczne osobliwości

Abstract. The paper deals with the notion of a probability space as a mathematical object, and also as a mathematical model of a real non-mathematical situation. A construction of probability spaces with the tools of mathematical analysis and geometry is proposed. Geometrical and physical interpretations of the discrete probability space are offered as well.

Szkolna geometria, a zatem także geometria na sekcji nauczycielskiej, nie może być izolowana od realnego świata, w którym uczeń spotyka co krok idee geometryczne, który inspiruje i motywuje rozmaite geometryczne zadania i problemy, a zarazem kształtuje geometryczne intuicje. Podobne odniesienia do rzeczywistości musi uwzględniać stochastyka dla nauczyciela. Praca dotyczy pojęcia przestrzeni probabilistycznej jako podstawowego pojęcia stochastyki, jego odniesień do otaczającego nas świata, relacji z innymi dziedzinami matematyki, a także ogólnomatematycznych idei i problemów inspirowanych tym pojęciem.

1. Przestrzeń probabilistyczna jako podstawowe pojęcie rachunku prawdopodobieństwa

Szkolne ujęcia rachunku prawdopodobieństwa nie uwzględniają faktu, że przedmiotem tej dziedziny matematyki jest konstruowanie i badanie przestrzeni probabilistycznych (a nie techniki obliczania prawdopodobieństwa zdarzenia). Wyjdźmy od aksjomatycznej definicji tego matematycznego pojęcia (jej idea pochodzi od A. Kołmogorowa). Moc zbioru A oznaczamy symbolem $\overline{\overline{A}}$.

Definicja 1
Przestrzenią probabilistyczną nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$, gdzie Ω jest dowolnym niepustym zbiorem, $\mathcal{Z}$ jest σ-ciałem podzbiorów zbioru Ω, P zaś funkcją ze zbioru $\mathcal{Z}$ w $\mathbb{R}$, nieujemną, przeliczalnie addytywną i $P(\Omega) = 1$. Elementy zbioru $\mathcal{Z}$ nazywamy *zdarzeniami*, funkcję P nazywamy *prawdopodobieństwem*, a liczbę $P(A)$ dla $A \in \mathcal{Z}$ – *prawdopodobieństwem zdarzenia* A.

Niech m_L^k oznacza k-wymiarową miarę Lebesgue'a (por. Cramer, 1958, s. 27-38 oraz Moszner, 1978, s. 100-102). Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ i $0 < m_L^k(\Omega) = z < +\infty$. Rodzina $\mathcal{Z}$ tych podzbiorów zbioru Ω, które mają miarę m_L^k, jest σ-ciałem podzbiorów zbioru Ω, a funkcja P określona wzorem

$$P(A) = \frac{1}{z} \cdot m_L^k(A) \qquad \text{dla } A \in \mathcal{Z}, \tag{1}$$

jest prawdopodobieństwem. Trójka $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ jest zatem przestrzenią probabilistyczną. Nazywamy ją *geometryczną przestrzenią probabilistyczną*, a funkcję P nazywamy *prawdopodobieństwem geometrycznym*. Jest to w istocie jedyna w podręcznikach przestrzeń konstruowana *a priori*. Idę jej tworzenia sugerują analogie między definicją Kołmogorowa a definicją miary unormowanej.

Aksjomatyczna definicja pozwala jedynie rozstrzygać, czy zadana trójka $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ jest przestrzenią probabilistyczną, nie daje natomiast recept, jak te przestrzenie tworzyć. Jest to jej istotna wada. Podobną usterkę ma definicja Cauchy'ego granicy ciągu. Tymczasem konstruowanie przestrzeni probabilistycznej może być aktywnością matematyczną obejmującą ważną dla stochastycznego kształcenia metodologię rachunku prawdopodobieństwa. Organizacja fazy matematyzacji w procesie stosowania rachunku prawdopodobieństwa do rozwiązywania problemów obejmuje konstruowanie przestrzeni probabilistycznej jako modelu pewnego doświadczenia losowego (faza matematyzacji).

Każdy problem rachunku prawdopodobieństwa rozwiązuje się w odpowiedniej przestrzeni probabilistycznej. Prawdopodobieństwo zdarzenia oblicza się zawsze w pewnej konkretnej przestrzeni probabilistycznej. Dla każdego zadania tę przestrzeń tworzy się od nowa. Jest to pewna osobliwość rachunku prawdopodobieństwa, której koncepcje szkolnej matematyki nie uwzględniają.

2. Ziarnista, czyli dyskretna przestrzeń probabilistyczna

Definicja 2
Niech Ω będzie co najmniej dwuelementowym i co najwyżej przeliczalnym zbiorem. Funkcję $p\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, nieujemną i taką, że $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$, nazywamy *rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze* Ω. Niech $\mathcal{Z} = 2^\Omega$. Zbiór $\mathcal{Z}$ jest σ-ciałem podzbiorów zbioru Ω. Funkcja $P\colon \mathcal{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem:

$$P(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A = \emptyset, \\ p(\omega), & \text{gdy } A = \{\omega\}, \\ \displaystyle\sum_{\omega\in\Omega\wedge\omega\in A} p(\omega), & \text{gdy } \overline{\overline{A}} > 1, \end{cases} \tag{2}$$

jest prawdopodobieństwem, a więc trójka $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ jest przestrzenią probabilistyczną. Nazywamy ją *ziarnistą* albo *dyskretną przestrzenią probabilistyczną*.

Używamy tu terminu „ziarnisty" (w znaczeniu, jakie ma w języku angielskim słowo *discrete*, czyli oderwany, odosobniony, nieciągły) zamiast rozpowszechnionego w matematyce terminu „dyskretny" (który jest tłumaczeniem z angielskiego słowa *discreet*, czyli roztropny, ostrożny, dyskretny, pełen rezerwy, zob. J. Stanisławski, *Wielki słownik angielsko-polski*, Wiedza Powszechna, Warszawa 1966, s. 222).

Tworzenie ziarnistej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ sprowadza się zatem do określenia rozkładu prawdopodobieństwa p na co najwyżej przeliczalnym zbiorze Ω, a więc do konstruowania pary (Ω, p), którą możemy także nazywać *przestrzenią probabilistyczną*.

Definicja 3
Niech $\overline{\overline{\Omega}} = s$ i $p(\omega) = \frac{1}{s}$ dla każdego $\omega \in \Omega$. Funkcję p nazywamy *klasycznym rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze* Ω, a parę (Ω, p) nazywamy *klasyczną przestrzenią probabilistyczną*.

Definicja 4
Ziarniste przestrzenie probabilistyczne (Ω_1, p_1) i (Ω_2, p_2) nazywamy *izomorficznymi*, jeśli istnieje bijekcja g ze zbioru Ω_1 na zbiór Ω_2 i taka, że

$$\forall y \in \Omega_2\ \forall x \in \Omega_1\quad [y = g(x) \Longrightarrow p_2(y) = p_1(x)]. \tag{3}$$

Izomorfizm przestrzeni probabilistycznych jest podstawą stochastycznej symulacji jako ważnego zagadnienia, zarówno gdy chodzi o proces stosowania matematyki (metody Monte Carlo), jak i o kształcenie stochastyczne.

3. Przestrzeń probabilistyczna generowana przez zmienną losową

Definicja 5
Niech $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną w sensie definicji aksjomatycznej. Funkcję $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *zmienną losową w tej przestrzeni*, jeśli spełniony jest warunek

$$\forall x \in \mathbb{R}\quad [\{\omega \in \Omega:\ X(\omega) < x\} \in \mathcal{Z}]. \tag{4}$$

Jeżeli $\mathcal{Z} = 2^{\Omega}$, to każda funkcja $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek (4). W ziarnistej przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) każda funkcja ze zbioru Ω w zbiór $\mathbb{R}$ jest zmienną losową.

Załóżmy, że X jest zmienną losową w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$. Zbiór $\mathcal{B}$ borelowskich podzbiorów prostej $\mathbb{R}$ jest σ-ciałem pozbiorów zbioru $\mathbb{R}$. Z faktu, że funkcja X spełnia warunek (4) wynika, że

$$\forall A \in \mathcal{B} \ \ [\{\omega : \ X(\omega) \in A\} \in \mathcal{Z}]. \tag{5}$$

Warunek (5) orzeka, że przeciwobraz każdego zbioru borelowskiego A na prostej poprzez zmienną losową X jest zdarzeniem w przestrzeni $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$. Funkcja $P_X\colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$P_X(A) = P(\{\omega : X(\omega) \in A\}) \qquad \text{dla } A \in \mathcal{B},$$

jest prawdopodobieństwem, a trójka $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ jest nową przestrzenią probabilistyczną. Zmienna losowa X w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ przeprowadza ją w nową przestrzeń probabilistyczną $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$.

Jeśli zbiór Ω_X wartości zmiennej losowej X w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ jest co najwyżej przeliczalny, to zmienną losową X nazywamy *ziarnistą*. Każda zmienna losowa w ziarnistej przestrzeni probabilistycznej jest zatem ziarnistą zmienną losową. Niech $\{X{=}x_j\} = \{\omega \in \Omega : \ X(\omega) = x_j\}$. Zbiór $\{X{=}x_j\}$ jest zdarzeniem w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$. Niech $P(X{=}x_j)$ oznacza jego prawdopodobieństwo.

Definicja 6

Niech X będzie ziarnistą zmienną losową w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$. Funkcja $p_X\colon \Omega_X \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie

$$p_X(x_j) = P(X{=}x_j) \qquad \text{dla } x_j \in \Omega_X\,,$$

jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω_X. Parę (Ω_X, p_X) nazywamy *ziarnistą przestrzenią probabilistyczną generowaną przez zmienną losową X.*

Nietrudno zauważyć, że

$$P_X(A) = \sum_{x_j \in A} p_X(x_j) \qquad \text{dla } A \in \mathcal{B}.$$

Definicja 7

Niech X będzie ziarnistą zmienną losową w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$. Niech Ω_X będzie zbiorem jej wartości przyjmowanych z dodatnim prawdopodobieństwem, p_X zaś jej rozkładem. *Wartością oczekiwaną zmiennej losowej* X nazywamy liczbę

$$E(X) = \begin{cases} c, & \text{gdy } \Omega_X = \{c\}, \\ \sum_{j=1}^{t} x_j \cdot p_X(x_j), & \text{gdy } \Omega_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_t\}, \\ \sum_{j=1}^{+\infty} x_j \cdot p_X(x_j), & \text{gdy } \Omega_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}, \end{cases} \tag{6}$$

pod warunkiem, że ostatni szereg jest zbieżny i to bezwzględnie.

4. Analiza matematyczna a ziarniste przestrzenie probabilistyczne

Aby określić ziarnistą przestrzeń probabilistyczną, wystarczy określić ciąg liczbowy o wyrazach nieujemnych i taki, że szereg utworzony na tle tego ciągu jest zbieżny i ma sumę 1. Analiza matematyczna dostarcza zatem przykładów ziarnistych przestrzeni probabilistycznych i środków ich konstrukcji.

Niech u oznacza dowolną ustaloną liczbą rzeczywistą z przedziału $(0, 1)$, λ zaś ustaloną liczbę rzeczywistą dodatnią. Niech $v = 1 - u$.

1. W analizie matematycznej dowodzi się, że

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k} = 1, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} v^{n-1} \cdot u = 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = 1,$$

a zatem przestrzeniami probabilistycznymi są następujące pary:
$(\{0, 1, 2, \ldots, n\}, p_B)$, gdzie $p_B(k) = \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k}$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n$,
$(\mathbb{N}_1, (a_n))$, gdzie $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ dla $n \in \mathbb{N}_1$,
$(\mathbb{N}_1, (b_n))$, gdzie $b_n = (1-u)^{n-1} u$ dla $n \in \mathbb{N}_1$,
$(\mathbb{N}_0, (c_n))$, gdzie $c_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$ dla $n \in \mathbb{N}_0$.
Funkcja p_B nazywa się *rozkładem dwumianowym*. Ciąg (b_n) nazywa się *rozkładem geometrycznym*, ciąg (c_n) zaś *rozkładem Poissona*.

2. Niech k będzie ustaloną liczbą ze zbioru $\mathbb{N}_2$. Rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\mathbb{N}_k$ jest ciąg (b_n), gdzie

$$b_n = \binom{n-1}{k-1} u^k (1-u)^{n-k} \qquad \text{dla } n = k, k+1, k+2, \ldots . \tag{7}$$

Ciąg (b_n) nazywamy *rozkładem Pascala*.

3. Szereg funkcyjny $x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$ jest jednostajnie zbieżny na przedziale $(0,1)$ i

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \qquad \text{dla } x \in (0,1).$$

Wyrazy tego szeregu są funkcjami różniczkowalnymi na przedziale $(0,1)$ i szereg pochodnych, tj. szereg $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$, jest także jednostajnie zbieżny na przedziale $(0,1)$. Z twierdzenia o różniczkowaniu szeregu funkcyjnego (Leja, 1969, s. 205) wynika, że

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{dla } x \in (0,1),$$

czyli

$$(1-x)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = 1. \tag{8}$$

Z warunku (8) wynika, że funkcja $p\colon \mathbb{N}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$p_x(n) = nx^{n-1}(1-x)^2 \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{9}$$

jest dla każdego $x \in (0,1)$ rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\mathbb{N}_1$. Mamy więc jednoparametrową rodzinę przestrzeni probabilistycznych $(\mathbb{N}_1, p_x)$, gdzie $x \in (0,1)$.

4. Niech k będzie ustaloną liczbą ze zbioru $\mathbb{N}_1$, u zaś ustaloną liczbą z przedziału $(0,1)$. Jest

$$\sum_{n=k}^{+\infty} n\binom{n-1}{k-1} u^k (1-u)^{n-k} = \frac{k}{u}. \tag{10}$$

Wynika to z faktu, że wartość oczekiwana czasu trwania schematu Pascala o parametrach k i u jest ilorazem $\frac{k}{u}$ (por. Płocki, 2004, s. 256). Rozważmy ciąg (q_n), gdzie

$$q_n = \frac{nu}{k}\binom{n-1}{k-1} u^k (1-u)^{n-k} \qquad \text{dla } n = k, k+1, k+2, \ldots. \tag{11}$$

Z warunku (10) wynika, że ciąg (q_n) jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\mathbb{N}_k$, a więc para $(\mathbb{N}_k, (q_n))$ jest ziarnistą przestrzenią probabilistyczną.

5. Powtarzanie rzutu monetą tak długo, aż reszka wypadnie dwa razy pod rząd, jest doświadczeniem losowym δ_{rr} o losowej liczbie etapów. Czas jego trwania, odmierzany liczbą wykonanych rzutów, jest zmienną losową T_{rr}. W (Krech,

1999) pokazano, że $P(T_{rr} = n) = f_{n-1}(\frac{1}{2})^n$ dla $n = 2, 3, 4, \ldots$, gdzie (f_n) jest ciągiem Fibonacciego, tj. ciągiem określonym następująco: $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ i $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ dla $n = 2, 3, 4, \ldots$. Funkcja $p_{T_{rr}}\colon \{2, 3, 4, \ldots\} \longrightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$p_{T_{rr}}(n) = f_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{dla } n = 2, 3, 4, \ldots, \tag{12}$$

jest rozkładem zmiennej losowej T_{rr}, a zatem para $(\mathbb{N}_2, p_{T_{rr}})$ jest przestrzenią probabilistyczną generowaną na prostej przez zmienną losową T_{rr}.

6. Wartość oczekiwana zmiennej losowej T_{rr} jest sumą szeregu

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n \cdot f_{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Tę wartość oczekiwaną można znaleźć za pomocą tzw. *algorytmu średniego czasu błądzenia po grafie stochastycznym* (por. Płocki, 1997, s. 306), rozwiązując układ trzech równań liniowych, a więc z pominięciem teorii szeregów. Stosując ten algorytm dostajemy, że

$$E(T_{rr}) = \sum_{n=2}^{+\infty} n \cdot f_{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 6,$$

czyli

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{6} \cdot f_{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1,$$

a zatem, jeżeli (f_n) jest ciągiem Fibonacciego, to ciąg (h_n), gdzie

$$h_n = \frac{n}{6} \cdot f_{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{dla } n \in \mathbb{N}_2,$$

jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\mathbb{N}_2$. Para $(\mathbb{N}_2, (h_n))$ jest przestrzenią probabilistyczną uzyskaną środkami analizy matematycznej i rachunku prawdopodobieństwa.

Niech f będzie funkcją nieujemną i ciągłą na przedziale $[a, b]$. Funkcja f jest zatem całkowalna na tym przedziale. Niech

$$\int_a^b f(x)\, dx = u.$$

Podzielmy przedział $[a, b]$ punktami $c_0 = a < c_1 < c_2 < \ldots < c_n = b$. Niech F_j oznacza obszar ograniczony od góry wykresem funkcji f, od dołu osią odciętych, od lewej prostą $x = c_{j-1}$ i od prawej prostą $x = c_{j+1}$ dla $j = 1, 2, 3, \ldots, n-1$.

Obszar F_j nazywa się w analizie trapezem krzywoliniowym. Funkcja p, która figurze F_j przypisuje liczbę

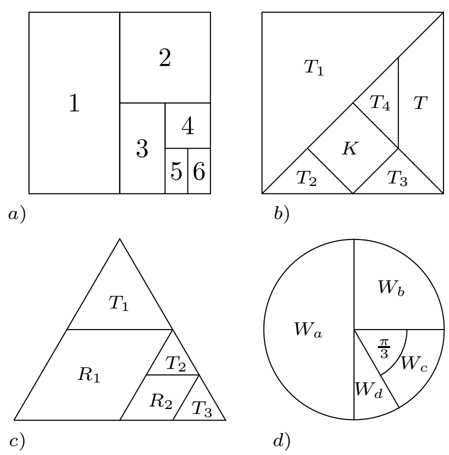
$$\frac{1}{u}\int_{c_{j-1}}^{c_j} f(x)\,dx$$

jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\Omega = \{F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n\}$.

5. Geometria a ziarniste przestrzenie probabilistyczne

Niech $F = \{(x, y) : (a \leqslant x \leqslant b) \wedge (c \leqslant y \leqslant d)\}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ oraz $a < b$ i $c < d$. W definicji całki oznaczonej Riemanna z funkcji dwóch zmiennych f po prostokącie F narzuca się na ten prostokąt *sieć*. Jej *oczkami* są prostokąty, których wnętrza są parami rozłączne, a których suma mnogościowa jest zbiorem F (por. Leja, 1969, s. 329). Analogicznie określamy sieć i jej oczka w przypadku, gdy F jest dowolną figurą na płaszczyźnie (mającą dodatnie pole) i zbiory podziału (oczka sieci) są dowolnymi figurami o dodatnim polu.

Narzućmy sieć na kwadrat F o polu 1. Jeśli Ω jest zbiorem jej oczek, to funkcja p, która każdemu z oczek przypisuje jego pole, jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω. Tak określoną przestrzeń probabilistyczną prezentuje rys. 1*a* oraz rys. 1*b* (oczkami tej sieci są figury tworzące tzw. *tangram*).



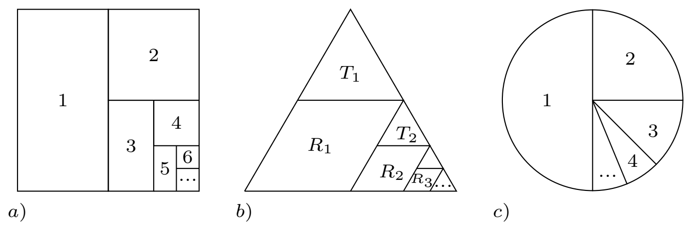
Rysunek 1. Cztery skończone przestrzenie probabilistyczne jako obiekty geometryczne

Niech F będzie dowolną figurą o dodatnim polu. Taką figurą jest na rysunku 1*c* trójkąt równoboczny o boku równym 1. Oczkami sieci są: trójkąty T_1, T_2 i T_3 oraz romby R_1 i R_2. Niech $\Omega_c = \{T_1, T_2, T_3, R_1, R_2\}$. Jeśli funkcja p_c

przypisuje oczku owej sieci iloraz pola tego oczka i liczby $\frac{\sqrt{3}}{2}$, to para (Ω_c, p_c) jest przestrzenią probabilistyczną.

Jeśli Ω_d jest zbiorem $\{W_a, W_b, W_c, W_d\}$ wycinków koła o promieniu 1 na rys. 1d, a p_d jest funkcją, która wycinkowi przypisuje iloraz miary kąta tego wycinka i liczby 2π, to para (Ω_d, p_d) jest przestrzenią probabilistyczną. Mamy zatem pewną ideę tworzenia przestrzeni probabilistycznych jako obiektów geometrycznych.

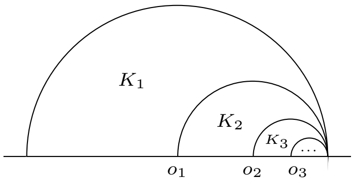
Sieć narzucana na figurę o dodatnim polu może być nieskończona. Proces narzucania takiej sieci na kwadrat o polu 1 prezentuje rys. 2a. Niech Ω będzie zbiorem ponumerowanych wycinków koła o promieniu 1 na rys. 2c. Jeśli funkcja p przypisuje wycinkowi koła iloraz miary kąta tego wycinka i liczby 2π, to para (Ω, p) jest przeliczalną przestrzenią probabilistyczną. Na rys. 2 mamy trzy przeliczalne przestrzenie probabilistyczne jako obiekty geometryczne.



Rysunek 2. Trzy przeliczalne przestrzenie probabilistyczne jako obiekty geometryczne

Aby utworzyć ziarnistą przestrzeń probabilistyczną, wystarczy na dowolną figurę F na płaszczyźnie i mającą dodatnie pole narzucić sieć, której oczkami są figury mające pole. Określanie ciągu pól kolejnych oczek sieci, jako etap konstrukcji przestrzeni probabilistycznej, jest zadaniem geometrycznym.

Załóżmy, że promień r_1 półkola o środku w punkcie o_1 na rys. 3 jest równy $\frac{1}{2\pi}$. Niech K_1 oznacza różnicę mnogościową tego półkola i półkola o środku w punkcie o_2 i promieniu $\frac{1}{4\pi}$. Rysunek 3 tłumaczy jak powstaje ciąg $K_2, K_3, K_4, \ldots$ figur. Funkcja, która (dla $n = 1, 2, 3, \ldots$) figurze K_n przypisuje jej pole, jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\{K_1, K_2, K_3, \ldots\}$. Rysunek 3 prezentuje pewną przeliczalną przestrzeń probabilistyczną.



Rysunek 3. Ciąg figur zawartych w półkolu o promieniu 1 jako prezentacja przeliczalnej przestrzeni probabilistycznej

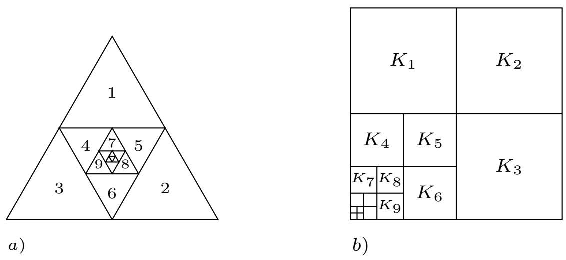
Rozważmy trójkąt równoboczny T o boku równym 1. Środkowe boków trójkąta T dzielą go na cztery trójkąty równoboczne. Trójkąty, których jeden z wierzchołków jest zarazem wierzchołkiem trójkąta T, oznaczmy liczbami 1, 2 i 3, jak na rys. 4*a*. Środkowy trójkąt podzielmy znów na cztery trójkąty, trzy z nich oznaczmy liczbami 4, 5 i 6 (rys. 4*a*), pozostały (środkowy) podzielmy na cztery trójkąty łącząc środki jego boków itd. Ta nieskończona procedura prowadzi do nieskończonego zbioru ponumerowanych trójkątów.

Zbiór Ω ponumerowanych trójkątów na rysunku 4*a* przedstawmy jako zbiór ich numerów. Mamy zatem $\Omega = \mathbb{N}_1 = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Funkcja p zadana wzorem

$$p(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{[\frac{n-1}{3}]+1} \qquad \text{dla } n \in \mathbb{N}_1\,, \tag{13}$$

gdzie $[x]$ oznacza cechę liczby x, jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω. Ta funkcja przypisuje trójkątowi o numerze j iloraz jego pola i liczby $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Para (Ω, p) jest przeliczalną przestrzenią probabilistyczną.

Na rys. 4*b* kwadrat o polu 1 podzielono na cztery kwadraty. Trzy z nich, oznaczone K_1, K_2, K_3, stają się elementami zbioru Ω, pozostały podzielono na cztery kwadraty, trzy z nich (oznaczone K_4, K_5, K_6) stają się elementami zbioru Ω, czwarty podzielono na cztery kwadraty itd. Tak powstaje nieskończony zbiór Ω kwadratów. Funkcja p, która każdemu kwadratowi ze zbioru Ω przypisuje jego pole, jest rozkładem prawdopodobieństwa na tym zbiorze. Rysunek 4*b* prezentuje przeliczalną przestrzeń probabilistyczną (Ω, p) jako obiekt geometryczny.



Rysunek 4. Dwie przeliczalne przestrzenie probabilistyczne jako obiekty geometryczne

Przestrzenie probabilistyczne zaprezentowane na rys. 4*a* i 4*b* są izomorficzne. Izomorficzne są także przestrzenie przedstawione na rys. 2*a* i 2*c*.

Konstrukcja co najwyżej przeliczalnej przestrzeni probabilistycznej może obejmować obliczanie pól, a także miar pewnych kątów.

Te osobliwe przykłady przestrzeni probabilistycznych raczej nie kojarzą się z rachunkiem prawdopodobieństwa, pełnią jednak ważną rolę w stochastycznym kształceniu nauczyciela matematyki. Uświadamiają one, że pojęcie przestrzeni probabilistycznej należy do świata matematyki i nie musi mieć nic wspólnego z rzutami monetą, kostką, czy z losowaniami kul z urny. Mówimy tu o kształtowaniu pojęcia przestrzeni probabilistycznej jako obiektu świata matematyki (niekoniecznie mającego konkretne interpretacje i znaczenia). Podobnie kształtujemy pojęcie struktury algebraicznej (grupa, pierścień, ciało) jako ogólne pojęcie, w oderwaniu od od konkretnych znaczeń zbioru i działań w tym zbiorze.

6. Geometryczna i fizyczna interpretacja ziarnistej przestrzeni probabilistycznej

Załóżmy, że para (Ω, p) jest ziarnistą przestrzenią probabilistyczną.

[GEOMETRYCZNA INTERPRETACJA PRZESTRZENI PROBABILISTYCZNEJ] Elementy zbioru Ω możemy interpretować jako:

— odcinki, będące oczkami sieci narzuconej na odcinek $\overline{ab}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $b - a = 1$ i to tak, że liczba $p(\omega)$ jest długością oczka ω tej sieci;

— figury płaszczyzny, powstałe jako oczka sieci (niekoniecznie prostokątnej) narzuconej na kwadrat o polu 1 tak, że liczba $p(\omega)$ jest polem oczka ω;

— bryły, będące oczkami sieci narzuconej na jednostkowy sześcian w taki sposób, że $p(\omega)$ jest objętością oczka ω, gdzie $\omega \in \Omega$.

Mówimy tu o *miarowej*, albo *geometrycznej interpretacji ziarnistej przestrzeni probabilistycznej*.

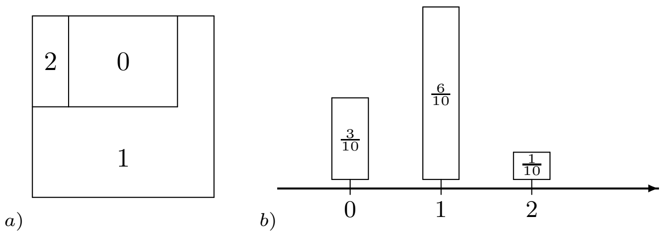
Rysunek 1a) możemy uważać za geometryczną interpretację skończonej przestrzeni probabilistycznej. Rysunek 2a jest geometryczną interpretacją przestrzeni $(\mathbb{N}_1, (a_n))$, gdzie (a_n) jest ciągiem określonym wzorem $a_n = (\frac{1}{2})^n$ oraz przestrzeni probabilistycznej przedstawionej na rys. 2c.

[FIZYCZNA INTERPRETACJA PRZESTRZENI PROBABILISTYCZNEJ] Interpretujmy elementy zbioru Ω jako pewne obiekty fizyczne (np. jako cegiełki w kształcie prostopadłościanu), liczbę $p(\omega)$ interpretujmy jako masę obiektu (cegiełki) ω. Łączna masa wszystkich obiektów (wszystkich cegiełek) jest równa 1. Mówimy tu o *fizycznej interpretacji przestrzeni probabilistycznej*. Jeśli $\Omega \subset \mathbb{R}$ i $\omega \in \Omega$, to liczbę $p(\omega)$ będziemy dalej interpretować jako masę skupioną na osi liczbowej w punkcie ω. Pojawia się tu problem środka ciężkości owego układu mas. Ten środek daje się wyznaczać na gruncie rachunku prawdopodobieństwa.

Niech $\Omega = \{0, 1, 2\}$, $p(0) = \frac{3}{10}$, $p(1) = \frac{3}{5}$ i $p(2) = \frac{1}{10}$. Parę (Ω, p) przedstawiono w interpretacji geometrycznej na rys. 5a. Na rys. 5b przedstawiono ją w interpretacji fizycznej. Środkiem ciężkości tego układu mas jest punkt $\frac{4}{5}$.

Niech (Ω_X, p_X) będzie przestrzenią probabilistyczną generowaną przez zmienną losową X, a P_X prawdopodobieństwem w tej przestrzeni (definicja 5). Niech $A \in \mathcal{B}$. W interpretacji fizycznej przestrzeni probabilistycznej (Ω_X, p_X)

liczba $P_X(A)$ jest sumą mas skupionych w punktach zbioru A. Wartość oczekiwana zmiennej losowej X, tj. liczba $E(X)$, jest w tej interpretacji środkiem ciężkości rozkładu p_X jako rozkładu jednostkowej masy w punktach zbioru Ω_X (por. Płocki, 2004, s. 227).



Rysunek 5. Geometryczna i fizyczna interpretacja przestrzeni probabilistycznej (Ω, p)

7. Produkt kartezjański przestrzeni probabilistycznych i jego geometryczna prezentacja

DEFINICJA 8
Załóżmy, że (Ω_1, p_1) i (Ω_2, p_2) są dowolnymi ziarnistymi przestrzeniami probabilistycznymi. Niech $\Omega_{1-2} = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(x, y) : \ x \in \Omega_1 \wedge y \in \Omega_2\}$. Określmy na zbiorze Ω_{1-2} funkcję p_{1-2} wzorem:

$$p_{1-2}(x, y) = p_1(x) \cdot p_2(y) \qquad \text{dla każdego } x \in \Omega_1 \text{ i dla każdego } y \in \Omega_2\,.$$

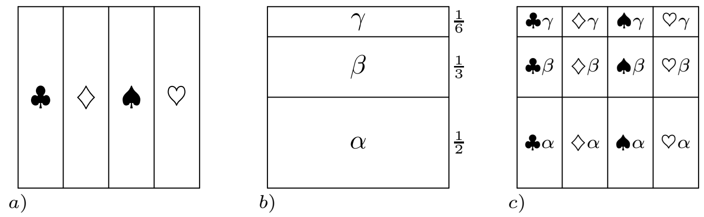
Parę (Ω_{1-2}, p_{1-2}) nazywamy *produktem kartezjańskim przestrzeni probabilistycznych* (Ω_1, p_1) *oraz* (Ω_2, p_2) i oznaczamy $(\Omega_1, p_1) \times (\Omega_2, p_2)$. Produkt kartezjański $(\Omega, p) \times (\Omega, p)$ nazywamy *kwadratem kartezjańskim* i oznaczamy $(\Omega, p)^2$.

Pojęcie produktu kartezjańskiego uogólnia się na n przestrzeni probabilistycznych, gdzie $n \in \mathbb{N}_2$. Produkt kartezjański n identycznych przestrzeni probabilistycznych (Ω, p) nazywamy *n-tą potęgą kartezjańską przestrzeni* (Ω, p) i oznaczamy $(\Omega, p)^n$.

Produkt kartezjański ziarnistych przestrzeni probabilistycznych jest też ziarnistą przestrzenią probabilistyczną. Produkt kartezjański klasycznych przestrzeni probabilistycznych jest klasyczną przestrzenią probabilistyczną.

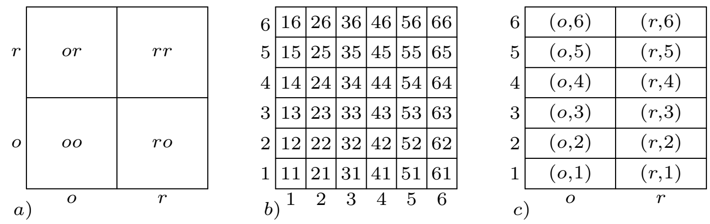
Niech $\Omega_1 = \{\clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$ i $p_1(\omega) = \frac{1}{4}$ dla $\omega \in \Omega_1$ oraz $\Omega_2 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ i $p_2(\alpha) = \frac{1}{2}$, $p_2(\beta) = \frac{1}{3}$, $p_2(\gamma) = \frac{1}{6}$. Przestrzenie probabilistyczne (Ω_1, p_1) i (Ω_2, p_2) mamy na rys. 6*a* i 6*b*. Rysunek 6*c* prezentuje w geometrycznej interpretacji przestrzeń probabilistyczną (Ω_{1-2}, p_{1-2}), tj. produkt kartezjański $(\Omega_1, p_1) \times (\Omega_2, p_2)$. W zapisie pary pominięto nawiasy i przecinek.

Przestrzenią probabilistyczną jest para (Ω_M, p_M), gdzie $\Omega_M = \{o, r\}$ i $p_M(o) = p_M(r) = \frac{1}{2}$. Kwadrat kartezjański $(\Omega_M, p_M)^2$ w interpretacji geometrycznej prezentuje rys. 7*a*.



Rysunek 6. Idea tworzenia produktu kartezjańskiego dwu przestrzeni probabilistycznych

Niech $\Omega_K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i $p_K(j) = \frac{1}{6}$ dla $j \in \Omega_K$. Kwadrat kartezjański $(\Omega_K, p_K)^2$ jest klasyczną przestrzenią probabilistyczną. W interpretacji geometrycznej prezentuje ją rys. 7*b*. Rysunek 7*c* przedstawia produkt kartezjański $(\Omega_M, p_M) \times (\Omega_K, p_K)$. Ten produkt jest także klasyczną przestrzenią probabilistyczną.



Rysunek 7. Produkty kartezjańskie: $(\Omega_M, p_M)^2$, $(\Omega_K, p_K)^2$ i $(\Omega_M, p_M) \times (\Omega_K, p_K)$

Niech $\Omega_0 = \{0, 1\}$, $p_0(1) = u$, $p_0(0) = v = 1 - u$, gdzie $0 < u < 1$ oraz $n \in \mathbb{N}_2$. Niech $\Omega_n = \{0, 1\}^n$. Jeśli $\omega = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \{0, 1\}^n$, to przez $J(\omega)$ oznaczmy sumę $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Funkcja p_n^u określona wzorem

$$p_n^u(\omega) = u^{J(\omega)}(1 - u)^{n-J(\omega)} \qquad \text{dla } \omega \in \Omega_n \,,$$

jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω_n i $(\Omega_n, p_n^u) = (\Omega_0, p_0)^n$. Para (Ω_n, p_n^u) jako n-ta potęga kartezjańska zero-jedynkowej przestrzeni probabilistycznej (Ω_0, p_0) jest przestrzenią probabilistyczną określoną regułami drzewa stochastycznego dla schematu Bernoulliego o n próbach i prawdopodobieństwie sukcesu w próbie równym u, gdzie $0 < u < 1$ (Płocki, 2004, s. 69-70).

8. Przestrzeń probabilistyczna jako model doświadczenia losowego

Przestrzenie probabilistyczne kojarzą nam się z doświadczeniami losowymi, tj. eksperymentami, czy zjawiskami, o przebiegu i wyniku których decyduje przypadek. Mamy tu na uwadze (por. Feller, 1977, s. 16-22) dwa ich typy:

— *doświadczenia pomyślane*, dające się przeprowadzać jedynie w teorii (rzut symetryczną monetą, losowanie za pomocą ruletki punktu na obwodzie jej tarczy, strzałka takiej ruletki jest odcinkiem), Feller nazywa je *doświadczeniami myślowymi* (Feller, 1977, s. 10),
— *doświadczenia realne* (rzut złotówką, konstytuowanie się płci noworodka, rozpad atomu radioaktywnego, krzyżowanie dwu heterozygot, (por. Płocki, 2004, s. 101)).

Pierwsze są już obiektami świata matematyki, drugie należą do świata, w którym żyje i działa człowiek. W podręcznikach, jeśli wspomina się w ogóle o doświadczeniach losowych, to tylko o tych pomyślanych (i to w zasadzie jedynie o rzutach symetrycznymi monetami i kostkami). Przedmiotem stochastyki dla nauczyciela muszą być także doświadczenia realne.

Na lekcjach geometrii uczeń bada i opisuje konkretne obiekty, mierzy, zlepia siatki brył, zgina, przesuwa itd. Formami konkretnej czynności są konstrukcje za pomocą kredy, cyrkla i linijki. Podobnie na lekcjach rachunku prawdopodobieństwa uczeń zbiera dane statystyczne za pomocą konkretnych monet czy kostek, gdy odkrywa własności pewnych przestrzeni probabilistycznych, a tworząc *a priori* te przestrzenie wykorzystuje matematyczne cechy (jak symetrie, proporcje) tych konkretnych przyrządów losujących. Mamy tu także na uwadze proces stosowania matematyki, którego faza matematyzacji jest tworzeniem probabilistycznej przestrzeni dla realnych doświadczeń losowych.

Zbiór wyników doświadczenia losowego δ jest co najmniej dwuelementowy. Jeśli ten zbiór jest zarazem co najwyżej przeliczalny, to δ nazywamy *ziarnistym doświadczeniem losowym.* Wśród ziarnistych doświadczeń wyróżnimy te, które przebiegają etapami. Nazywamy je *doświadczeniami wieloetapowymi.*

Nie da się przewidzieć, którym z możliwych wyników zakończy się doświadczenie δ, gdy je za chwilę wykonamy. O tym rozstrzyga przypadek. Przedmiotem dalszych rozważań jest każde doświadczenie losowe δ, dla którego:

— da się określić zbiór Ω_δ jego możliwych wyników,
— ten zbiór Ω_δ jest co najwyżej przeliczalny,
— dla każdego z wyników można określić *a priori* prawdopodobieństwo, z jakim doświadczenie δ może się zakończyć tym wynikiem.

Mowa tu więc o pewnej funkcji $p_\delta\colon \Omega_\delta \longrightarrow \mathbb{R}$ i takiej, że dla $\omega \in \Omega_\delta$ liczba $p_\delta(\omega)$ jest prawdopodobieństwem wyniku ω. Podstawą do ocen wartości funkcji p_δ są na ogół pewne symetrie, proporcje, innym razem pewne miary, czasem są to dane empiryczne. W przypadku każdego ziarnistego doświadczenia losowego δ wspomniana funkcja p_δ jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω_δ. Para $(\Omega_\delta, p_\delta)$ jest zatem ziarnistą przestrzenią probabilistyczną. Opisuje ona doświadczenie losowe δ na gruncie matematyki, bo za pomocą obiektów matematycznych, jakimi są: zbiór i funkcja. Parę $(\Omega_\delta, p_\delta)$ nazywamy *modelem probabilistycznym* (albo krótko: *modelem*) *doświadczenia* δ.

Tworzenie modelu probabilistycznego doświadczenia losowego, choć dotyczy pogranicza świata matematyki i rzeczywistości, może być działalnością matematyczną, obejmującą specyficzne argumentacje natury stochastycznej, w tym zagadnienia kodowania i dekodowania pewnych obiektów za pomocą zbiorów i funkcji (wynik doświadczenia jako kombinacja, albo jako wariacja). Jeśli ω jest ciągiem skończonym, to symbolem $|\omega|$ oznaczamy jego długość, a więc liczbę jego wyrazów.

Doświadczeniem losowym jest rzut monetą. Jego wyniki oznaczamy następująco:

$$o - \texttt{wypadnie orzeł}, \qquad r - \texttt{wypadnie reszka}.$$

Modelem probabilistycznym rzutu monetą jest przestrzeń probabilistyczna (Ω_M, p_M), gdzie $\Omega_M = \{o, r\}$ i $p_M(o) = p_M(r) = \frac{1}{2}$. Modelem probabilistycznym dwukrotnego rzutu monetą jest przestrzeń $(\Omega_M, p_M)^2$. Ten model przedstawiono w interpretacji geometrycznej na rys. 7*a*. Rysunek 7*b* przedstawia przestrzeń probabilistyczną $(\Omega_K, p_K)^2$ jako model dwukrotnego rzutu kostką. Przestrzeń probabilistyczna $(\Omega_M, p_M) \times (\Omega_K, p_K)$ przedstawiona w interpretacji geometrycznej na rys. 7*c* jest modelem doświadczenia, którego polega na rzucie monetą i rzucie kostką. Jest to doświadczenie losowe o dwunastu jednakowo prawdopodobnych wynikach. Ten fakt można wykorzystać do symulowania znaku zodiaku przypadkowo spotkanej osoby przy estymacji prawdopodobieństwa, że w grupie dwunastu przypadkowo spotkanych osób są co najmniej dwie urodzone pod wspólnym znakiem zodiaku (Płocki, 2004, s. 154).

Para $(\Omega_M, p_M)^n$ jest modelem probabilistycznym n-krotnego rzutu monetą. Jest to klasyczna przestrzeń probabilistyczna i

$$(\Omega_M)^n = \{o, r\}^n \qquad \text{oraz} \qquad \overline{\overline{\{o, r\}^n}} = 2^n.$$

Z tych faktów wynika, że jeśli ω jest wynikiem n-krotnego rzutu monetą, to jego prawdopodobieństwo jest równe $\frac{1}{2^n}$, czyli $(\frac{1}{2})^n$, a więc $(\frac{1}{2})^{|\omega|}$.

Rozważmy dowolne doświadczenie losowe, które polega na powtarzaniu rzutu monetą tak długo, aż zostanie spełniony pewien warunek w_M. Oto przykłady takich warunków:

w_M^1: *po raz pierwszy wypadnie reszka,*

w_M^2: *reszka wypadnie po raz k-ty,*

w_M^3: *reszka wypadnie k razy pod rząd,*

w_M^4: *po trzech reszkach pod rząd wypadnie orzeł,*

w_M^5: *po orle reszka wypadnie dwa razy pod rząd, albo po dwu reszkach pod rząd wypadnie orzeł.*

Niech δ_M^j oznacza powtarzanie rzutu monetą aż do spełnienia warunku w_M^j. Doświadczenie δ_M^1 nazywa się *czekaniem na reszkę*, δ_M^2 nazywa się *czekaniem na* *k reszek*, a δ^3_M — *czekaniem na k reszek pod rząd*. Doświadczenie δ^4_M nazywamy *czekaniem na serię rro*, doświadczenie δ^5_M zaś — *czekaniem na jedną z dwóch serii orr i rro*. Są to doświadczenia losowe o losowej liczbie etapów. Liczba rzutów monetą wykonanych w doświadczeniu δ^j_M jest zmienną losową T^j_M, którą nazywamy *czasem trwania doświadczenia* δ^j_M.

Wynik doświadczenia δ^j_M jest ciągiem wyników kolejnych etapów, a więc pewną wariacją zbioru $\{o, r\}$. Jeśli ω jest wynikiem doświadczenia δ^j_M i $|\omega| = n$, to ω jest szczególnym wynikiem n-krotnego rzutu monetą, a więc z powyższych argumentacji wynika, że prawdopodobieństwo tego wyniku jest równe $\frac{1}{2^n}$, czyli $(\frac{1}{2})^{|\omega|}$. Jeśli zatem $\Omega_{\delta^j_M}$ jest zbiorem wyników doświadczenia δ^j_M, to funkcja $p_{\delta^j_M}$ określona wzorem

$$p_{\delta^j_M}(\omega) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|\omega|} \qquad \text{dla } \omega \in \Omega_{\delta^j_M},$$

jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\Omega_{\delta^j_M}$, a zarazem każdemu wynikowi doświadczenia δ^j_M przypisuje jego prawdopodobieństwo. Para $(\Omega_{\delta^j_M}, p_{\delta^j_M})$ jest zatem modelem probabilistycznym doświadczenia δ^j_M.

Rozważmy warunek w^3_M. W przypadku $k = 2$ doświadczenie δ^3_M jest czekaniem na dwie reszki pod rząd. Oznaczmy je δ_{rr}. Każdy wynik tego czekania jest ciągiem $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ spełniającym układ warunków:

1) $n \geqslant 2$ (ciąg jest co najmniej dwuwyrazowy),
2) $a_j \in \{o, r\}$ dla $j = 1, 2, 3, \dots, n$ (j-ty wyraz tego ciągu jest wynikiem j-tego rzutu monetą),
3) $(a_{n-1}, a_n) = (r, r)$ (dwa ostatnie wyrazy tworzą ciąg (r, r)),
4) $\forall (a_{n-k}, a_{n-k+1})\ \forall k :\ [(1 < k < n - 1) \Longrightarrow (a_{n-k}, a_{n-k+1}) \neq (r, r)]$ (żaden podciąg dwóch kolejnych wcześniejszych wyrazów nie tworzy ciągu (r, r)).

Niech Ω_{rr} oznacza zbiór tak określonych ciągów. Jeśli $\omega \in \Omega_{rr}$ i $|\omega| = n$, to ω jest szczególnym wynikiem n-krotnego rzutu monetą, a zatem jego prawdopodobieństwo jest równe $\frac{1}{2^n}$, czyli $(\frac{1}{2})^n$. Para (Ω_{rr}, p_{rr}), gdzie

$$p_{rr}(\omega) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|\omega|} \qquad \text{dla } \omega \in \Omega_{rr},$$

jest modelem probabilistycznym czekania na dwie reszki pod rząd.

Ciekawe problemy pojawiają się przy konstrukcji przestrzeni generowanych na prostej przez zmienne losowe T^j_M. Są to głównie zagadnienia kombinatoryczne, choć nie dotyczą klasycznych przestrzeni probabilistycznych.

Czas czekania na dwie reszki pod rząd jest zmienną losową T_M^3, którą oznaczmy symbolem T_{rr}. Jest więc $T_{rr}(\omega) = |\omega|$ dla $\omega \in \Omega_{\delta_M^3}$. Mamy tu

$$\Omega_{T_{rr}} = \mathbb{N}_2 \quad \text{oraz} \quad p_{T_{rr}}(n) = P(T_{rr} = n) = f_{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}_2\,,$$

gdzie (f_n) jest ciągiem Fibonacciego określonym na s. 211. Para $(\mathbb{N}_2, p_{T_{rr}})$ jest przestrzenią probabilistyczną generowaną na prostej przez zmienną losową T_{rr}.

Przestrzenią probabilistyczną generowaną przez zmienną losową T_M^2 (jest ona czasem czekania na k reszek) jest para $(\mathbb{N}_k, (b_n))$, gdzie ciąg (b_n) jest rozkładem Pascala określonym wzorem (7) dla $u = \frac{1}{2}$.

Przedstawiona konstrukcja przestrzeni probabilistycznej jako modelu doświadczenia δ_M^j sugeruje pewną ideę konstruowania modelu probabilistycznego dla doświadczenia losowego, które jest:

— powtarzaniem rzutu kostką tak długo, aż zostanie spełniony pewien warunek w_K,

albo

— losowaniem ze zwracaniem kuli z urny $U_{1\to s}$ trwającym tak długo, aż wylosowane kule spełnią pewien warunek w_U.

Jeśli warunkiem w_K jest uzyskanie każdej z liczb oczek co najmniej raz, to doświadczenie nazywa się *czekaniem na kolekcję wszystkich sześciu wyników rzutu kostką*. Niech warunek w_U oznacza, że każda z kul z urny $U_{1\to s}$ zostanie wylosowana co najmniej raz. Oba te doświadczenia losowe są przykładami tzw. *schematu kolekcjonera* (por. Płocki, 2004, s. 78).

W kontekście relacji: przestrzeń probabilistyczna – model probabilistyczny doświadczenia losowego pojawiają się dwa typy problemów:

— w pierwszym chodzi o konstrukcję modelu probabilistycznego zadanego doświadczenia losowego δ (ten problem dotyczy fazy matematyzacji),

— drugi dotyczy określania doświadczenia losowego, którego modelem jest zadana przestrzeń probabilistyczna (Ω, p) (ten problem dotyczy interpretacji).

Każdy z nich inspiruje osobliwe aktywności matematyczne, w tym także działalność matematyczną na styku świata realnego (w którym uczeń spotyka doświadczenia losowe) i świata matematycznej abstrakcji (do którego należy pojęcie przestrzeni probabilistycznej).

Tworzenie przestrzeni probabilistycznej jako modelu doświadczenia δ można porównać do szycia garnituru na miarę. Przestrzeń probabilistyczna jako pojęcie matematyczne jest takim garniturem. Matematyk tworzy te przestrzenie nie biorąc pod uwagę, czy są one modelami jakichś doświadczeń losowych (nie jest to przedmiotem jego twórczości). Matematyk niejako „szyje gotowe garnitury”. Inżynier, ekonomista czy socjolog (oni stosują metody probabilistyczne do rozwiązywania problemów pozamatematycznych) wybiera z owej kolekcji gotowych przestrzeni (jako gotowych garniturów) tę, która dobrze opisuje badany problem (jest właściwym garniturem).

Stochastyka dostarcza narzędzi weryfikowania zgodności z doświadczeniem przyjętej przestrzeni probabilistycznej jako jego modelu (chodzi na ogół o przestrzenie generowane przez pewne zmienne losowe). Mowa tu o testach zgodności χ^2. Interesujący komentarz dotyczący relacji: świat realny – model probabilistyczny jego fragmentów, przytacza H. Cramer w pracy (Cramer, 1958, s 143-150).

W przypadku stochastyki dla nauczyciela konstruowanie przestrzeni probabilistycznej jako modelu doświadczenia losowego (szycie garnituru na miarę) jest ważną aktywnością matematyczną. Chodzi o dobór środków matematyzacji, chodzi o specyficzne dla stochastyki argumentacje (że dana liczba jest prawdopodobieństwem określonego wyniku doświadczenia losowego).

9. Klasyfikacja jednakowo możliwych przypadków

Przedstawimy jedną z metod konstruowania przestrzeni probabilistycznej jako modelu doświadczenia losowego. Określimy model równoczesnego losowania dwóch kul z urny U, w której są 3 kule oznaczone liczbą 0 i dwie kule z liczbą 1 (rys. 8).

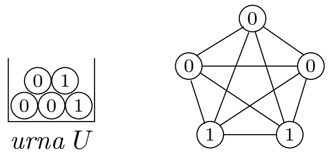
Wynik losowania jest jednoznacznie określony przez sumę liczb na dwu wylosowanych kulach. Są więc trzy wyniki tego doświadczenia losowego δ_U :

0: `na obu wylosowanych kulach będzie liczba 0`,

1: `na jednej kuli będzie liczba 0, na jednej liczba 1`,

2: `na obu wylosowanych kulach będzie liczba 1`.

Doświadczenie δ_U jest w istocie losowaniem liczby ze zbioru $\{0, 1, 2\}$. Jeśli jego modelem jest przestrzeń probabilistyczna (Ω_U, p_U), to $\Omega_U = \{0, 1, 2\}$.



Rysunek 8. Urna U i jednakowo możliwe przypadki przy losowaniu z niej dwóch kul

Każdy odcinek na rys. 8 przedstawia jednakowo możliwy przypadek. Tych przypadków mamy 10. Spośród nich trzy prowadzą do wyniku 0, a zatem prawdopodobieństwo tego, że wylosowaną liczbą będzie 0 jest równe $\frac{3}{10}$. Z rysunku 8 wynika więc, że

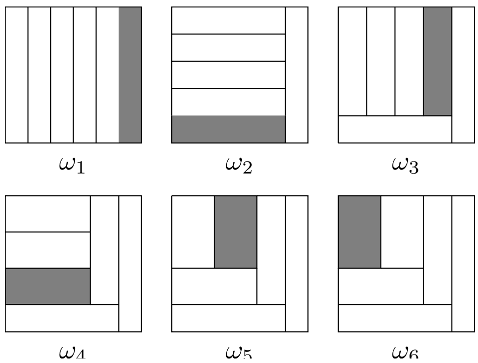
$$p_U(0) = \frac{3}{10}, \quad p_U(1) = \frac{6}{10} \quad \text{i} \quad p_U(2) = \frac{1}{10}.$$

W tym losowaniu szanse liczb nie są równe. W interpretacji geometrycznej i fizycznej przedstawiono tę przestrzeń probabilistyczną (Ω_U, p_U) na rys. 5.

10. Prawdopodobieństwo jako szansa wymierzana polem

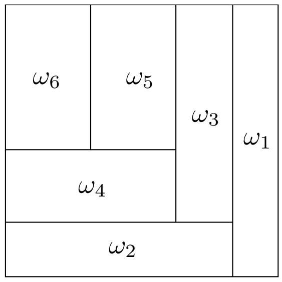
Rozważmy urnę U_{5*1}, w której jest 5 kul białych i jedna czerwona. Doświadczenie δ^c_{6*1} jest losowaniem bez zwracania kuli z tej urny tak długo, aż zostanie wylosowana kula czerwona. Niech ω_k oznacza wynik: `kula czerwona zostanie wylosowana za` k`-tym razem po raz pierwszy` $(k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

Rysunek 9 prezentuje pewną geometryczną ideę znajdowania prawdopodobieństwa każdego z wyników doświadczenia δ^c_{5*1}. Na kwadrat o polu 1 narzucana jest etapami sieć. Rysunek ukazuje, jak po kolejnych losowaniach rozdziela się jednostkowe prawdopodobieństwo (reprezentuje je pole kwadratu) pomiędzy wyniki tych losowań. Pionowe linie odpowiadają nieparzystym, poziome zaś parzystym etapom losowania.



Rysunek 9. Etapowy rozkład prawdopodobieństwa pomiędzy wyniki doświadczenia δ^c_{5*1} – prawdopodobieństwo wyniku jako pole

Wynik ω_j doświadczenia δ^c_{5*1} staje się w tej interpretacji oczkiem sieci, a pole tego oczka wymierza szanse (czyli prawdopodobieństwo), że doświadczenie δ^c_{5*1} zakończy się wynikiem ω_j. Przestrzeń probabilistyczną jako rezultat pewnego procesu prezentuje (w interpretacji geometrycznej) rysunek 10.



$$p(\omega_1) = \tfrac{1}{6} \cdot 1$$
$$p(\omega_2) = \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{5}{6}$$
$$p(\omega_3) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{5}{6}$$
$$p(\omega_4) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{5}{6}$$
$$p(\omega_5) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{5}{6}$$
$$p(\omega_6) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{5}{6}$$

Rysunek 10. Model doświadczenia δ^{c}_{5*1} w interpretacji geometrycznej

Nietrudno skojarzyć tę ideę z metodą konstruowania przestrzeni probabilistycznej za pomocą reguł drzewa stochastycznego (zob. Płocki, 2004, s. 56-59). Te reguły drzewa rozpowszechniono wśród uczniów, którzy je stosują przy rozwiązywaniu zadań na obliczanie prawdopodobieństwa zdarzenia, na ogół nie rozumiejąc ich probabilistycznego sensu (co potwierdzają egzaminy wstępne na studia). Wspomniane rachunki prowadzone są bowiem poza określoną przestrzenią probabilistyczną.

Argumentacja, że wszystkie wyniki doświadczenia δ^{c}_{5*1} są jednakowo prawdopodobne, obejmuje teraz rozwiązywanie geometrycznego zadania. Chodzi o wykazanie, że pola wszystkich oczek na rys. 10 są równe.

Modelem doświadczenia δ^{c}_{5*1} jest klasyczna przestrzeń probabilistyczna izomorficzna z przestrzenią (Ω_K, p_K), gdzie $\Omega_K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ta ostatnia jest modelem rzutu kostką (liczba k oznacza wynik: `wypadnie` k `oczek`). Bijekcja $g(\omega_k) = k$ dla $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ jest słownikiem do symulacji rzutu kostką za pomocą urny U_{5*1} .

Geometryczna i fizyczna interpretacja przestrzeni probabilistycznej może być środkiem dydaktycznym w organizacji fazy rachunków i dedukcji. Zdarzenie jest w tej interpretacji zbiorem pewnych figur, prawdopodobieństwo zdarzenia zaś sumą pól tych figur, a więc polem nowej figury (Płocki, 2004, s. 117).

11. Własności przestrzeni probabilistycznych – własności prawdopodobieństwa

Załóżmy, że (Ω, p) jest przestrzenią probabilistyczną, a P prawdopodobieństwem w tej przestrzeni, a więc funkcją ze zbioru $\mathcal{Z} = 2^{\Omega}$ w zbiór $\mathbb{R}$ określoną wzorem (6). Weźmy pod uwagę następujące implikacje:

(w1) *Jeżeli* $P(A) = 0$*, to* $A = \emptyset$ *(jeśli prawdopodobieństwo zdarzenia jest zerem, to jest to zdarzenie niemożliwe).*

(w2) *Jeśli* $P(B) = 1$*, to* $B = \Omega$ *(jeśli prawdopodobieństwo zdarzenia jest równe* 1*, to jest to zdarzenie pewne).*

(w3) *Jeśli* $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$, *to* $P(A) = P(B)$ (*jeśli zdarzenia są równoliczne, to są to zdarzenia jednakowo prawdopodobne*).

(w4) *Jeśli* $P(A) = P(B)$, *to* $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ (*jeśli zdarzenia są jednakowo prawdopodobne, to te zdarzenia są równoliczne*).

(w5) *Jeśli* $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$, *to* $P(A) > P(B)$.

(w6) *Jeśli* $P(A) > P(B)$, *to* $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$.

(w7) *Jeśli* $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}}$, *to* $P(A) \neq P(B)$.

(w8) *Jeśli* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, *to* $A \cap B = \emptyset$.

(w9) *Jeżeli* $P(A \cup B) = 1$, *to* $A \cup B = \Omega$ *i* $A \cap B = \emptyset$ (*jeśli prawdopodobieństwo sumy dwóch zdarzeń jest równe* 1, *to zdarzenia te są przeciwne*).

(w10) *Jeżeli* $\overline{\overline{A}} = k$ *i* $\overline{\overline{\Omega}} = s$, *to* $P(A) = \frac{k}{s}$.

Implikacja (w1) orzeka, że *„zerowanie się prawdopodobieństwa zdarzenia jest warunkiem wystarczającym na to, aby to zdarzenie było niemożliwe”*.

Zdanie (w3)$\wedge$(w4) orzeka, że *„równoliczność zdarzeń jest warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby były one jednakowo prawdopodobne”*.

Zdanie (w5)$\wedge$(w6) orzeka, że *„warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby zdarzenie A było bardziej prawdopodobne niż zdarzenie B jest to, aby zdarzenie A było liczniejszym zbiorem niż zdarzenie B”*.

W sondażach organizowanych dla studentów matematyki wszystkie te implikacje są powszechnie uznawane za prawdziwe (por. (Major, Nawolska, 1999, s. 310-315) oraz (Major, Płocki, 1993)). Tymczasem żadna z nich nie jest prawdziwa.

Nietrudno zauważyć, że jeśli P jest prawdopodobieństwem w klasycznej przestrzeni probabilistycznej (jeśli zatem do poprzednika każdej z tych implikacji dołączymy warunek *„przestrzeń probabilistyczna* (Ω, p) *jest klasyczna”*), to nowe implikacje są już zdaniami prawdziwymi, a więc są twierdzeniami rachunku prawdopodobieństwa.

To powszechne uznawanie własności klasycznej przestrzeni za własność każdej przestrzeni jest błędem merytorycznym. Można stawiać hipotezę, że jego źródło tkwi w fakcie, iż cały szkolny rachunek prawdopodobieństwa sprowadzono do obliczania prawdopodobieństwa zdarzeń za pomocą tzw. *definicji klasycznej* (a więc, mówiąc poprawnie, za pomocą twierdzenia klasycznego Laplace'a). Można tę koncepcję szkolnej probabilistyki porównać z podejściem do geometrii trójkąta, w którym rozważa się wyłącznie trójkąty równoboczne.

Argumentacja, że przytoczone implikacje nie są twierdzeniami rachunku prawdopodobieństwa, sprowadza się do konstrukcji kontrprzykładów. Studenci, którzy wątpili w prawdziwość niektórych implikacji, poszukiwali kontrprzykładów wśród przestrzeni probabilistycznych będących modelami schematów kostkowo-urnowych. Te próby nie mogły się kończyć sukcesem, bo modele tych schematów są przestrzeniami klasycznymi. W opisanej sytuacji trudności związane z konstruowaniem kontrprzykładu wynikają z faktu, że studenci poznali jedynie przestrzenie probabilistyczne jako modele pewnych doświadczeń losowych i to takich, których wyniki są jednakowo prawdopodobne.

Rozważmy w tym kontekście przestrzeń probabilistyczną $\Omega^* = \{a, b, c\}$ i $p^*(a) = \frac{1}{3}$, $p^*(b) = 0$, $p(c) = \frac{2}{3}$. W tej osobliwej przestrzeni probabilistycznej (Ω^*, p^*) mamy 8 zdarzeń. Są wśród nich zdarzenia pozwalające dowieść, że każda z powyższych implikacji jest fałszywa.

Przestrzeń probabilistyczna (Ω^*, p^*) nijak nie kojarzy się studentom z rachunkiem prawdopodobieństwa, bo nie potrafią jej przypisać jakiemuś doświadczeniu losowemu. Rozpatrywanie przestrzeni probabilistycznej nie jako samoistnego pojęcia matematycznego, a tylko i wyłącznie jako modelu doświadczenia losowego jest dydaktycznym błędem.

12. Język stochastyki – trudności wynikające z terminologii

Nie jest obojętne, jaką terminologię stosujemy w nauczaniu matematyki. Język matematyki szkolnej może być także środkiem dydaktycznym. Na projekt nadawania nazwy matematycznemu obiektowi w nauczaniu (i to nie tylko przy konstruowaniu definicji) chcemy patrzeć jak na aktywność analizującą istotę i pewną naturę tego obiektu. W koncepcji szkolnej stochastyki zaprezentowanej w (Płocki, 2004) nie używa się ogólnie przyjętych (w podręcznikach z rachunku prawdopodobieństwa) zwrotów *przestrzeń zdarzeń elementarnych*, *zdarzenie elementarne* czy *dyskretna przestrzeń probabilistyczna*. Obok naturalnych dla ucznia znaczeń tych terminów unika się:

a) dziwnych stwierdzeń: *zdarzenie elementarne nie jest zdarzeniem*, *zdarzenie elementarne sprzyja zdarzeniu* i
b) nagminnych pomyłek wynikających z mylenia nazw *zdarzenie elementarne – zdarzenie losowe – doświadczenie losowe*,
c) mylenia pojęć *przestrzeń zdarzeń elementarnych* (zbiór) – *przestrzeń probabilistyczna* (para lub trójka obiektów).

Zwrot *zdarzenie elementarne* wydaje się właściwą nazwą dla jednoelementowych podzbiorów zbioru Ω jako szczególnych zdarzeń. W pracy (Płocki, 2004) nazywa się je *zdarzeniami prostymi*.

Wspomniano już o terminach *dyskretna* i *ziarnista* w kontekścia nazwy *przestrzeń probabilistyczna*. Za używaniem terminu *ziarnista* zamiast *dyskretna* opowiada się W. Nowicki w książce *O ścisłość i kulturę słowa w technice*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 1978 (s. 69-72). Chodzi tu o powody natury merytorycznej (por. uwaga na s. 207). Argumenty natury dydaktycznej za używaniem zwrotu *ziarnista* tłumaczy wspomniana fizyczna interpretacja takiej przestrzeni. Chcemy w nazwie obiektu oddać jego istotę, jego naturę, ułatwiając uczniowi posługiwanie się tą nazwą przy opisywaniu matematycznych faktów. Nazwa „ziarnista przestrzeń probabilistyczna” może sugerować poprawną definicję prawdopodobieństwa (wzór (6)) oraz podstawowe jego własności (addytywność – bo masa jest addytywna, monotoniczność – bo masa jest monotoniczna itd.), a więc może pełnić w nauczaniu stochastyki rolę środka dydaktycznego.

Pewną klasę błędów związanych z językiem tworzą te, w których pojęcie przestrzeni probabilistycznej jest utożsamiane z modelem probabilistycznym.

Twierdzenie klasyczne Laplace'a jest implikacją: *Jeżeli* (Ω, p) *jest klasyczną przestrzenią probabilistyczną i* $A \subset \Omega$, *i* $\overline{\overline{A}} = k$, *i* $\overline{\overline{\Omega}} = s$, *to* $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$. Tymczasem studenci formułują je następująco: *Jeżeli przestrzeń probabilistyczna* (Ω, p) *jest klasyczna i A jest zdarzeniem w tej przestrzeni (*$A \subset \Omega$*), to prawdopodobieństwo zdarzenia A jest ilorazem liczby wyników sprzyjających zdarzeniu A i liczby wszystkich możliwych wyników.* Pomylono tu dwa języki. Druga wersja jest interpretacją twierdzenia Laplace'a w sytuacji, gdy przestrzeń (Ω, p) jest modelem doświadczenia losowego δ i A jest zdarzeniem związanym z doświadczeniem δ (jest wówczas $A \subset \Omega$).

Analogiczne błędy towarzyszą sformułowaniom dotyczącym zmiennej losowej. Jako definicję zmiennej losowej podaje się często opis; *jest to funkcja, która każdemu wynikowi doświadczenia losowego przypisuje liczbę.* Zmiennymi losowymi są na ogół w podręcznikach probabilistyki:

— liczba reszek w n-krotnym rzucie monetą,
— liczba oczek wyrzuconych w n-krotnym rzucie kostką,
— liczba sukcesów w schemacie Bernoulliego o n próbach,
— wygrana gracza (tj. określona kwota pieniędzy) uzyskana za wynik doświadczenia losowego przeprowadzanego w grze losowej itd.

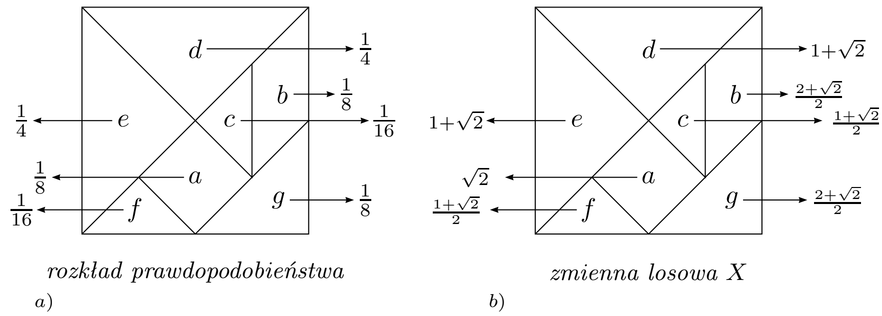
W każdym z tych przykładów o wspomnianej liczbie mówimy przed wykonaniem danego doświadczenia losowego. Tymczasem zmienna losowa jest pojęciem matematycznym. W ziarnistej przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) jest to funkcja $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Zacytowany opis jest interpretacją definicji zmiennej losowej X, gdy przestrzeń (Ω, p) jest modelem doświadczenia losowego δ.

Rysunek 11a) prezentuje przestrzeń probabilistyczną (Ω, p), gdzie Ω jest zbiorem figur tangramu powstałego z podziału kwadratu o polu 1, a funkcja p przypisuje każdej figurze jej pole (na rysunku określono ją digrafem).

Funkcja X, która każdej figurze ze zbioru Ω przypisuje jej obwód, jest zmienną losową w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p). Na rys. 11b) przedstawiono tę funkcję digrafem.

Przykłady prezentują geometryczne i kombinatoryczne narzędzia konstrukcji przestrzeni probabilistycznej jako modelu doświadczenia losowego.

Podstawową usterką dydaktycznych ujęć rachunku prawdopodobieństwa jest formułowanie i rozwiązywanie problemów poza przestrzenią probabilistyczną. Można się spierać, czy zadania na obliczanie prawdopodobieństwa zdarzenia, adresowane do maturzysty lub kandydata na studia, są w ogóle zadaniami z rachunku prawdopodobieństwa. To prowadzi do zasadniczego pytania, czy my w ogóle uczymy dziś w szkole rachunku prawdopodobieństwa? Konkluzją tej pracy jest odpowiedź negatywna.



Rysunek 11. Przestrzeń probabilistyczna i zmienna losowa jako obiekty geometrii

Literatura

Cramer, H.: 1958, *Metody matematyczne w statystyce*, PWN, Warszawa.

Feller, W.: 1977, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa.

Krech, I.: 1999, Čisla Fibonačči, věrojatnost' i čislovye rjady, *Didactics of Mathematics: Problems and Investigations* **1**, 27-35.

Leja, F.: 1969, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa.

Major, M., Nawolska, B.: 1999, *Matematyzacja, dedukcja, rachunki i interpretacja w zadaniach stochastycznych*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

Major, M., Płocki, A.: 1993, Kontrola i ocena stochastycznej wiedzy ucznia jako nowy problem dydaktyki matematyki, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **15**, 57-84.

Moszner, Z.: 1978, *O mierzeniu w matematyce*, PZWS, Warszawa.

Płocki, A.: 1997, *Stochastyka 1. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna jako matematyka „in statu nascendi"*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

Płocki, A.: 2004, *Prawdopodobieństwo wokół nas – rachunek prawdopodobieństwa w zadaniach i problemach*, Wydawnictwo „Dla szkoły", Wilkowice.

Instytut Matematyki
Akademia Pedagogiczna
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: adplocki@ap.krakow.pl