FOLIA 65

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis
Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia II (2009)

Zbigniew Powązka

O fałszywych przekonaniach obserwowanych na zajęciach z analizy matematycznej

Abstract. In this paper we present the results of our research carried out among the students of the first, second and third years of mathematical studies in the years 2003-2006. The research was focused on the difficulties these students faced in understanding the fundamental notions of the mathematical analysis such as: a limit, continuity, differentiability and integrability. These special problems, described in this paper, are called "false beliefs".

1. Wstęp

W roku 2005 na łamach czasopisma *Dydaktyka Matematyki* pojawiła się praca B. Pawlik dotycząca fałszywych przekonań studentów matematyki związanych z przekształceniami geometrycznymi na płaszczyźnie (Pawlik, 2005). Pod nazwą fałszywe przekonania rozumie autorka „fałszywe koncepcje, błędne schematy myślowe, niepoprawne reguły wnioskowania" i oznacza je symbolem FP. W cytowanej pracy stwierdza ponadto:

> Warto podkreślić, że choć nazywam schematy tego rodzaju przekonaniami, nie sugeruję, że są one uświadomione. Są stosowane przez studentów jakby automatycznie. Studenci postępując według tych schematów działają w dobrej intencji i wydają się być przekonani, że ich rozumowania i działania są poprawne. Fałszywe przekonanie studenta, który nie zetknął się z wywołującym zaniepokojenie konfliktem, zmuszającym go do weryfikacji swojego (błędnego) rozumowania, pozostają nieuświadomione.

Niniejsza praca jest rozszerzoną wersją referatu wygłoszonego przez autora na XX Szkole Dydaktyki Matematyki w Bielsku-Białej w roku 2006 (Powązka, 2006). Zostaną tu przedstawione wyniki badań przeprowadzonych w latach 2003-2006 dotyczących trudności studentów pierwszego, drugiego i trzeciego roku w posługiwaniu się podstawowymi pojęciami analizy matematycznej, takimi jak: granica, ciągłość, różniczkowalność i całkowalność funkcji.

Wybór takiej tematyki badawczej został podyktowany faktem, że analiza matematyczna znajduje liczne zastosowania w wielu innych działach matematyki. Wynika stąd konieczność poprawnego zrozumienia i przyswojenia treści tego przedmiotu, gdyż niewłaściwe ich rozumienie utrudnia poznawanie matematyki.

Przy studiowaniu matematyki konieczne jest możliwie szybkie wdrażanie studenta w myślenie abstrakcyjne. Jednak nie da się tego osiągnąć bez sensownej podbudowy w klasycznych modelach, które poznawane są na niższych poziomach edukacji. Program nauczania matematyki powinien więc być tak zbudowany, aby zapewniał swoistą sekwencję nauczania.

> Mówiąc o sekwencji nauczania mamy tutaj na myśli owo uporządkowanie w czasie, określone przez kolejność następujących po sobie wydarzeń, w trakcie których pojawiają się różne fazy procesów związanych z uczeniem się. Porządek ten jest dyktowany zarówno względami merytorycznymi (np. najpierw pojawiają się pojęcia prostsze, które następnie są używane do określania bardziej złożonych), jak i dydaktycznymi (np. w zależności od koncepcji dydaktycznej dana własność może być wprowadzona w formie definicji lub — w innym ujęciu — jako twierdzenie).
>
> (Klakla, Klakla, Nawrocki, Nowecki, 1992).

Wspomniana tu sekwencja nauczania nie wyklucza spiralnej koncepcji nauczania matematyki, która polega na omawianiu danego pojęcia na różnym poziomie ogólności, dostosowanym do możliwości intelektualnych uczącego się.

W procesie kształtowania pojęć można wyróżnić trzy etapy wprowadzania pojęć:

(a) etap przeddefinicyjny — na którym kształtuje się właściwe intuicje pojęć,

(b) etap definiowania — na którym pojawia się formalna definicja wraz ze stosownymi przykładami i kontrprzykładami,

(c) etap postdefinicyjny — na którym bada się związki poznanego pojęcia z innymi przyswojonymi wcześniej, jak również podejmuje się próbę uogólniania.

Jeżeli na którymś z etapów omawianego procesu osoba w nim uczestnicząca nie ukształtuje sobie poprawnie poznawanego pojęcia, może to doprowadzić do powstania w jej świadomości fałszywych przekonań. Jak wynika z badań B. Pawlik, wyprowadzenie z takiego przekonania nie jest prostym zabiegiem, gdyż:

> W rozumowaniach studentów funkcjonują fałszywe przekonania, które sterując ich myśleniem [...] utrudniają albo wręcz uniemożliwiają ich poprawne rozumowanie.
>
> (Pawlik, 2005)

Nie jest to oczywiście jedyna droga kształtowania pojęć, choć wydaje się bardzo naturalna. Zdarza się niekiedy, na wyższych poziomach edukacji, że wprowadza się najpierw definicję pojęcia, a dopiero później na bazie odpowiednich przykładów i kontrprzykładów buduje się potrzebne intuicje. Jest to na ogół sposób wykładu w podręcznikach akademickich. Trzeba zatem stopniowo przyzwyczajać studentów również do takiej metody kształtowania pojęć, ale należy postępować w tej mierze z dużą dbałością o poprawne zrozumienie ich przez studentów.

Termin „przekonanie" został zaczerpnięty z psychologii, gdzie używa się go w znaczeniu:

> emocjonalnego aspektu akceptowania jakiegoś sądu, twierdzenia lub doktryny.
>
> (Reber, Reber, 1981)

Ów emocjonalny aspekt w istotny sposób odróżnia przekonanie od „opinii", rozumianej jako

> tymczasowo przyjęty i dający się wyrazić punkt widzenia.
>
> (tamże, 476-477)

Nie dziwi zatem fakt, że przy emocjonalnej reakcji na pojęcie czy twierdzenie pojawiają się błędy, nazywane tu fałszywymi przekonaniami. Terminu tego nie stosuję jednak do opinii, która również może okazać się błędna.

Wieloletnie obserwacje i prowadzone badania wskazują, że przy studiowaniu analizy matematycznej, podobnie jak w geometrii elementarnej, studenci popełniają podobne błędy. Do ich opisu wykorzystamy typologię fałszywych przekonań zaproponowaną przez B. Pawlik, wzbogacając ją o jeszcze inne rodzaje. Wyróżniamy następujące rodzaje fałszywych przekonań:

1) FP „logiczno-pojęciowe",
2) FP „złączenia",
3) FP „analogia",
4) FP „metodologiczne",
5) FP „rysunek",
6) FP „symbol",

gdzie skrót FP oznacza fałszywe przekonanie.

Przez fałszywe przekonanie typu „logiczno-pojęciowego" rozumie się tu takie rozumowanie, które opiera się na błędnej tautologii lub niepoprawnej definicji pojęcia.

Fałszywe przekonania typu „złączenia" dotyczą rozumienia własności funkcji określonych wielonormowo lub definiowanych przy pomocy całki lub sumy szeregu funkcyjnego oraz funkcji złożonych. Pierwsze z nich sprawiają wiele trudności studentom zwłaszcza pierwszego roku studiów. Jest tak zapewne dlatego, że funkcje takie pojawiają się zbyt późno w nauczaniu szkolnym. Do tej grupy zaliczam również błędy związane z funkcjami definiowanymi przy pomocy wartości bezwzględnej (por. Major, Major, 2004; Major, 2006a; Major, 2006b; Major, Powązka, 2006; Powązka, 2006).

Do fałszywych przekonań „analogii" zaliczamy takie, które powstały przez nieostrożne przetworzenie wcześniej zdobytej wiedzy.

Fałszywe przekonanie typu „metodologicznego" pojawia się w momencie stosowania przez studentów błędnej metody rozwiązania zadania lub dowodu twierdzenia.

Do fałszywych przekonań typu „rysunek" zaliczamy rozumowania oparte na błędnie sporządzonym lub wyobrażonym rysunku. W dobie komputerów i kalkulatorów graficznych coraz częściej pojawia się u uczących się matematyki przekonanie, że wystarczy sporządzić rysunek i na tej podstawie znaleźć rozwiązanie zadania (por. Kąkol, Ratusiński, 2004). Tymczasem rysunek jest ważnym elementem dla postawienia hipotezy, ale nie jest żadnym dowodem. Jak wynika z przykładu prezentowanego na XIX Szkole Dydaktyki Matematyki (Powązka, 2005), źle sporządzony rysunek może prowadzić do błędnego rozwiązania, mimo tego, że dalej korzysta się poprawnie ze znanych twierdzeń.

Przez fałszywe przekonanie typu „symbol" rozumiemy tu takie sytuacje, w których uczący się stosuje niepoprawnie symbol pojęcia zdefiniowany i używany w literaturze przedmiotu. Ujawnia w ten sposób niezrozumienie stosowanego pojęcia, które prowadzi do wielu błędów i nieporozumień.

Narzędziami badawczymi były:

- prace pisemne wykonywane przez studentów podczas zajęć, zawierające pytania testowe jednokrotnego wyboru jak również typowe zadania rachunkowe lub na dowodzenie,
- rozmowy z wybranymi studentami.

Metodą badawczą była analiza wytworów działania (Łobocki, 1984), tzn. analiza opisanych wyżej materiałów pod kątem stopnia przyswojenia i zrozumienia pojęć: granicy ciągu lub funkcji, ciągłości, różniczkowalności i całkowalności funkcji jednej lub wielu zmiennych oraz popełnianych błędów.

2. Przykłady fałszywych przekonań

W punkcie tym podamy kilka przykładów błędnych rozumowań studentów zaobserwowanych na zajęciach trzyletniego kursu analizy matematycznej. Podejmiemy też próbę zakwalifikowania tych przekonań do jednej z kategorii określonych w punkcie pierwszym. Niektóre z tych przykładów można zaliczyć do więcej niż jednej kategorii.

Przykład 1
Podczas badania przyswojenia podstawowych twierdzeń analizy matematycznej na drugim roku zaproponowano studentom rozwiązanie następującego zadania:
Rozważmy warunki:

A: Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest ciągła w zbiorze $D \subseteq \mathbb{R}$.

B: Funkcja $g : D \to \mathbb{R}$ określona wzorem $g(x) = |f(x)|$ jest ciągła w zbiorze $D \subseteq \mathbb{R}$.

Wskazać zdanie prawdziwe:

a) Warunek A implikuje warunek B.

b) Warunek B implikuje warunek A.

c) Warunki A i B są równoważne.

d) Nie ma żadnego związku między warunkami A i B.

Zadanie to sprawiło studentom spore trudności. Błędy tam popełnione pokazują, że nawet dla studentów drugiego roku pojęcie wartości bezwzględnej jest nadal trudne. Przekonanie, że ciągłość wartości bezwzględnej funkcji f implikuje ciągłość funkcji f (około 22% badanych) lub jest jej równoważna (13% badanych) może wynikać ze stosowania nieprawdziwej równoważności

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p).$$

W takiej sytuacji należałoby zaliczyć je do grupy pierwszej (tzn. do FP „logiczno-pojęciowej"). Jest jednak bardzo prawdopodobne, że studenci niepoprawnie posługiwali się twierdzeniem o złożeniu funkcji ciągłych lub nie mieli dobrej intuicji obrazu figury w symetrii osiowej względem osi x. W takim przypadku należy do fałszywych przekonań FP „złączenia" i było już zbadane i opisane w literaturze (por. np. Major, Major, 2004; Major, 2006b; Major, Powązka, 2006).

Oto inny przykład ilustrujący trudności studentów w analizowaniu własności funkcji określonych za pomocą wartości bezwzględnej.

Zadanie to wiąże ze sobą dwa pojęcia: wartość bezwzględną i różniczkowalność funkcji w punkcie.

Przykład 2
Rozważmy warunki:

A: Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w zbiorze $D \subseteq \mathbb{R}$.

B: Funkcja $g : D \to \mathbb{R}$ określona wzorem $g(x) = |f(x)|$ jest różniczkowalna w zbiorze $D \subseteq \mathbb{R}$.

Wskazać zdanie prawdziwe:

a) Warunek A implikuje warunek B.

b) Warunek B implikuje warunek A.

c) Warunki A i B są równoważne.

d) Związek między warunkami zależy od postaci funkcji f.

Uzyskane wyniki pokazują, że 58% studentów udzieliło błędnych odpowiedzi, przy czym:

- odpowiedź a) wybrało 15,1% badanych,
- odpowiedź b) wskazało 38,4% uczestniczących w eksperymencie,
- odpowiedź c) zaznaczyło 4,5% ankietowanych studentów.

Tak duży procent odpowiedzi błędnych nasuwa przypuszczenie, że studenci nie kojarzą tego zadania z najprostszymi przykładami, jakimi są funkcje $f(x) = x$ i $g(x) = |x|$. Prawdopodobnie nie traktują funkcji $g(x) = |x|$ jako złożenia identyczności z wartością bezwzględną i nie pamiętają, że w wyniku tego złożenia następuje odbicie symetryczne części wykresu znajdującej się pod osią x względem tej osi. Jak wiadomo, w takim przekształceniu wykres funkcji może nie posiadać stycznej, mimo tego, że posiadał ją przed przekształceniem. Przeprowadzone rozmowy ujawniają fakt, że studenci nie traktują tych funkcji jako szczególnych przypadków omawianego problemu, szukając bardziej skomplikowanych przykładów. Można zatem uznać te dwie funkcje jako tzw. przypadek graniczny (Dyrszlag, 1978). Analiza rozwiązań omawianego zadania pokazuje, że studenci mają duże trudności w badaniu różniczkowalności funkcji. To fałszywe przekonanie zaliczamy do kategorii FP „złączenia".

Oto dwa inne przykłady fałszywych przekonań, które pojawiły się podczas zajęć związanych z pojęciem całki Riemana.

Przykład 3

Pod koniec drugiego roku studiów zaproponowano studentom rozwiązanie następującego zadania.

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ oraz $F(x) := \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a, b]$. Wskazać, które z poniższych twierdzeń jest prawdziwe.

a) Z całkowalności funkcji f wynika różniczkowalność funkcji F.

b) Z całkowalności funkcji f wynika ciągłość funkcji F.

c) Jeżeli funkcja F jest różniczkowalna, to funkcja f jest ciągła.

d) Z różniczkowalności funkcji F wynika monotoniczność funkcji f.

Analizując błędy, jakie popełnili studenci w tym zadaniu, zauważmy, iż 26% badanych stwierdziło, że całkowalność funkcji f pociąga różniczkowalność funkcji F. Tymczasem wiadomo, że operacja całkowania podnosi regularność funkcji. Zatem z całkowalności funkcji f w przedziale $[a, b]$ wynika ciągłość funkcji

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a, b]$, a z ciągłości funkcji f w tym przedziale — różniczkowalność funkcji F. Wobec tego część z badanych nie rozumiała własności funkcji górnej granicy całkowania. Byli zresztą świadomi tego faktu (por. Powązka, 2007). Zgodnie z przyjętą powyżej typologią fałszywych przekonań, przykład ten możemy zaliczyć do FP „złączenie”, gdyż dotyczy funkcji definiowanej przy pomocy całki. Można go również zaliczyć do FP „metodologiczne”, gdyż dotyczy błędnie stosowanego twierdzenia.

Przykład 4

Studentom drugiego roku matematyki zaproponowano rozwiązanie następującego zadania:

Dana jest funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Wskazać twierdzenie prawdziwe.

a) *Funkcja f jest funkcją całkowalną w sensie Riemanna w przedziale $[a, b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest ciągła w tym przedziale.*

b) *Jeśli f jest ciągła w przedziale $[a, b]$, to f jest całkowalna w tym przedziale.*

c) *Jeśli f jest całkowalna w $[a, b]$, to f jest ciągła w tym przedziale.*

d) *Jeśli f jest całkowalna w $[a, b]$, to f jest monotoniczna w tym przedziale.*

Zadanie to rozwiązało błędnie 32% badanych, przy czym odpowiedź a) wybrało 14% ankietowanych, odpowiedź c) 15% uczestników badań, zaś 3% uczestniczących w eksperymencie wybrało odpowiedź d). Z analizy rozwiązań wynika, że w trakcie pracy nad rozwiązaniem zadania w umyśle studenta nie kojarzyły się we właściwy sposób założenia twierdzeń z ich tezami. Dla przykładu – studenci wiązali ze sobą informacje: *funkcja f jest ciągła* lub *funkcja f jest monotoniczna* oraz *funkcja f jest całkowalna*, ale niezgodnie ze stosownymi twierdzeniami. Nie potrafili zatem dostrzec, a może nawet nie próbowali tego robić, jakie są wzajemne związki między omawianymi pojęciami. Z tego powodu zaliczamy te przekonania do FP „metodologiczne”.

Podamy obecnie przykład, który zaliczamy do FP „analogie”.

Przykład 5

Pod koniec drugiego roku studiów, po opracowaniu różniczkowalności odwzorowań w przestrzeni Banacha, zaproponowano studentom następujące zadanie:

Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha nad ciałem liczb rzeczywistych oraz $L : X \to Y$ ciągłym odwzorowaniem liniowym przestrzeni X w przestrzeń Y. Wskazać zdanie prawdziwe:

a) *Odwzorowanie L jest różniczkowalne w dowolnym punkcie $p_0 \in X$ oraz $L'(p_0) \cdot h = L(h)$.*

b) *Odwzorowanie L nie ma w dowolnym punkcie $p_0 \in X$ pochodnej kierunkowej w kierunku dowolnego niezerowego wektora.*

c) *Odwzorowanie L może nie być różniczkowalne w pewnym punkcie $p_0 \in X$.*

d) Odwzorowanie L może nie mieć w pewnym punkcie $p_0 \in X$ pochodnej w dowolnym kierunku.

Zadanie to wydawało się jego autorom bardzo łatwym, albowiem przykładem takiego odwzorowania w przypadku, gdy $X = Y = \mathbb{R}$, jest funkcja $x \to ax$, gdzie a jest dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą. Jej różniczkowalność nie powinna budzić żadnych wątpliwości na drugim roku studiów. Tymczasem 58% badanych udzieliło błędnej odpowiedzi, przy czym aż 44,6% osób uważało, że odwzorowanie takie nie musi być różniczkowalne w jakimś punkcie przestrzeni. Zachodzi pytanie o przyczynę tego zjawiska. Zapewne część z badanych nie znała definicji różniczkowalności odwzorowania w przestrzeni Banacha lub nie umiała jej zastosować do odwzorowania liniowego. Jest też prawdopodobne, że studenci rozumowali w następujący sposób: przestrzeń $\mathbb{R}$ jest modelem przestrzeni Banacha, zatem znane fakty z tego modelu mogą wyglądać inaczej w ogólnym przypadku. Dlatego to fałszywe przekonanie zakwalifikowane zostało do FP „analogie".

Poniższy przykład zaliczyć można do fałszywych przekonań typu FP „rysunek". Wprawdzie w temacie tego zadania nie pojawił się rysunek, ale do jego poprawnego rozwiązania niezbędna była znajomość wykresów funkcji elementarnych. Zatem z dużym prawdopodobieństwem można założyć, że popełnione w rozwiązaniu błędy wynikły przede wszystkim ze złych intuicji geometrycznych.

Przykład 6

Po opracowaniu rachunku różniczkowego funkcji jednej zmiennej i po zapoznaniu studentów z różnymi przykładami badania przebiegu zmienności funkcji poproszono ich o rozwiązanie następującego problemu.

Rozstrzygnąć, czy twierdzenie: Jeżeli $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są funkcjami różniczkowalnymi i dla każdego x należącego do $\mathbb{R}$ zachodzi nierówność $f(x) < g(x)$, to $f'(x) \leqslant g'(x)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

a) Twierdzenie to jest prawdziwe.

b) Twierdzenie to jest prawdziwe, gdy g jest funkcją wypukłą.

c) Twierdzenie to jest fałszywe.

d) Twierdzenie to jest prawdziwe, gdy obie funkcje są wypukłe.

Analiza rozwiązań tego zadania pokazuje, że 82% studentów miała fałszywe skojarzenia na temat wzajemnego położenia wykresów funkcji wypukłych oraz wykresów ich pochodnych. Ponad połowa badanych uważała, że w zbiorze funkcji wypukłych nierówność między funkcjami przenosi się na taką samą nierówność między ich pochodnymi. Ponadto 16% respondentów twierdziło, że dla prawdziwości tej implikacji wystarczy wypukłość tylko jednej z rozważanych funkcji. Tymczasem fałszywość akceptowanej przez studentów implikacji ilustrują funkcje $f(x) = x$ i $g(x) = x^2 + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Funkcje te są wypukłe w swych dziedzinach, zachodzi nierówność $f(x) < g(x)$ w zbiorze liczb rzeczywistych oraz $f'(x) = 1, g'(x) = 2x$ i nie zachodzi w zbiorze $\mathbb{R}$ nierówność $f'(x) < g'(x)$.

Ostatni z prezentowanych tu przykładów zaliczony został do fałszywych przekonań typu FP „symbol". Niepoprawnie użyty lub opisany przez studenta w zadaniu symbol pojęcia stał się bowiem okazją do popełnienia błędu, który może przerodzić się w fałszywe przekonanie.

Przykład 7

Na trzecim roku pod koniec kursu analizy matematycznej omawia się różne rodzaje całek, a w szczególności całki krzywoliniowe nieskierowane. Poproszono studentów o zredagowanie kilku własnych zadań z użyciem tej całki. Przy ich konstruowaniu studenci ujawnili szereg trudności w poprawnym ich sformułowaniu. Oto kilka charakterystycznych przykładów.

a) *Obliczyć całkę* $\int_k x^2 \cdot y^2 ds$ *po prostokącie* $[0,2] \times [0,3]$.

b) *Obliczyć* $\int x \cdot yds$, *gdzie* $y = x^2$, $x \in [0,1]$.

c) *Obliczyć całkę krzywoliniową nieskierowaną* $\int yds$, *gdzie* $S : x^2 + y^2 = r^2$.

d) *Obliczyć* $\int xds$.

e) *Obliczyć* $\int (x+y)dx$, $y = x^2$, $x \in [0,3]$.

Autor zadania a) stosuje symbolikę związaną z całką krzywoliniową nieskierowaną, ale w sformułowaniu tematu zadania nie odróżnia figury od jej brzegu. Popełnia błąd merytoryczny, gdyż rozważany prostokąt jest obszarem płaskim, a nie krzywą, ale zapewne ma na myśli obwód prostokąta, a nie sam prostokąt. W zadaniach b) i c) w symbolu całki zostało pominięte oznaczenie krzywej, po której należy całkować, ale autorzy podają obok równanie tej krzywej. Natomiast w przykładzie d) nie wiadomo, po jakim zbiorze należy obliczyć daną całkę. W zadaniu e) użyto symbolu innej całki niż krzywoliniowa nieskierowana. Powyższe zadania były spontanicznie tworzone przez studentów. Popełnione błędy świadczą o niedokładnym opanowaniu symbolu całki, ale być może wynikają również z niezrozumienia omawianego pojęcia.

3. Podsumowanie

W poprzednim punkcie podaliśmy kilka przykładów fałszywych przekonań zaobserwowanych podczas prowadzonych zajęć z analizy matematycznej na pierwszych trzech latach studiów matematycznych na Akademii Pedagogicznej w Krakowie. Wszystkie, zgodnie z określeniem B. Pawlik (Pawlik, 2005) cytowanym w punkcie pierwszym, powstały w umyśle studentów w wyniku stosowania przez badanych błędnych schematów myślowych i reguł wnioskowania. Niepokojącym wydaje się fakt dużej frekwencji poszczególnych błędów w badanej grupie studentów. Zachodzi zatem pytanie, dlaczego tak się dzieje, że w umyśle uczącego się powstają niepoprawne schematy myślowe. Przyczyny tego zjawiska są złożone. Zależą one bowiem od osobistego stosunku osoby uczącej się do poznawanego materiału, jej intelektualnych możliwości przyswajania różnych pojęć, jak również tempa i przejrzystości prezentacji treści nauczania na zajęciach. Zapewne nie da się ich usunąć z procesu nauczania. Zatem dla poprawnej organizacji tego procesu ważna jest znajomość kontekstów sytuacyjnych, w których mogą pojawiać się fałszywe przekonania. Dydaktyka matematyki zwraca uwagę na zalety wynikające z analizowania z uczącymi się popełnianych przez nich błędów (Krygowska, 1989).

Literatura

Dyrszlag, Z.: 1978, *O poziomach i kontroli rozumienia pojęć matematycznych w procesie dydaktycznym*, Studia i Monografie 65 (seria B), WSP w Opolu.

Kąkol, H., Ratusiński, T.: 2004, Rola komputera w procesie rozwiązywania zadań matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **26**, 119-138.

Klakla, M., Klakla, M., Nawrocki, J., Nowecki, B.: 1992, Pewna koncepcja badania rozumienia pojęć matematycznych i jej weryfikacja na przykładzie kwantyfikatorów, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **13**, 181-223.

Krygowska, Z.: 1989, Zrozumieć błąd w matematyce, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **10**, 141-147.

Łobocki, M.: 1984, *Metody badań pedagogicznych*, PWN, Warszawa.

Major, J.: 2006a, Rola zadań i problemów w kształtowaniu pojęć matematycznych na przykładzie bezwzględnej wartości liczby rzeczywistej, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **29**, 297-310.

Major, J.: 2006b, Uwagi na temat obrazu wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej u studentów III roku matematyki, *Matematika v škole dnes a zajtra, Zbornik 6, ročnika konferencie s medzinárodnou účast'ou*, Ružomberok, 171-176.

Major, J., Major, M.: 2004, Some remarks on students' knowledge of the absolute value, *Mathematica, Proceedings of the XI$^{\text{th}}$ Slovak–Czech–Polish Mathematical School*, 116-121.

Major, J., Powązka, Z.: 2006, Uwagi dotyczące pojęcia wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **I**, 163-185.

Pawlik, B.: 2005, Fałszywe przekonania dotyczące przkształceń geometrycznych na płaszczyźnie w rozumowaniach studentów matematyki, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **28**, 365-376.

Powązka, Z.: 2005, Uwagi wynikajace z badań nad rozumieniem podstawowych pojęć analizy matematycznej, http//fdm.e-dlaszkoly.pl/file.php/6/CD/XIXSDM.

Powązka, Z.: 2006, Wyniki badań wstępnych dotyczących fałszywych przekonań w analizie matematycznej, http//fdm.e-dlaszkoly.pl/file.php/6/CD/XXSDM.

Powązka, Z.: 2007, Problémy študentov matematiky s pochopenim poimov určitý a neurčitý integrál, *Matematika v škole dnes a zajtra, Zbornik 7, ročnika konferencie s medzinárodnou účast'ou*, Ružomberok, 257-262.

Reber, A. S., Reber, E. S.: 1981, *Słownik psychologii*, Wydawnictwo Naukowe SCHOLAR, Warszawa. Polskie wydanie pod redakcją prof. dr hab. I. Kurcz i prof. dr hab. K. Skarżyńskiej.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: powazka@ap.krakow.pl